العنوان:	تقدير توقع متغير الاستجابة في النماذج غير الخطية القابلة للتحويل إلى نماذج خطية
المصدر:	المجلة العراقية للعلوم الإحصائية
الناشر:	جامعة الموصل - كلية علوم الحاسوب والرياضيات
المؤلف الرئيسي:	العزاوى، دجلة إبراهيم مهدى
مؤلفين آخرين:	الستباني، عادل على أحمد(م. مشارك)
المجلد/العدد:	ع4
محكمة:	نعم
التاريخ الميلادي:	2002
الشهر:	كانون الأول
الصفحات:	72 - 96
رقم MD:	866463
نوع المحتوى:	بحوث ومقالات
قواعد المعلومات:	EcoLink
مواضيع:	تحليل الانحدار
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/866463

المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (4) 2002
ص ص [72-96]

تقدير توقع متغير الاستجابة في النماذج غير الخطية القابلة للتحويل الى نماذج خطية

د. دجله إبراهيم مهدي* عادل علي احمد الستباني

الملخص

في هذا البحث تبحث بعض مسائل التقدير المتعلقة بنوع معين من النماذج غير الخطية والقابلة للتحويل الى نماذج خطية. وتدرس بعض الطرائق المعروفة بهذا المجال، كما تقترح طريقة جديدة ويتم اعطاء مقدر ذي اقل دالة مربع خطأ.

Estimation of Expected Respond in Nonlinear Model after Linearization

ABSTRACT

In this research some problems of estimating a certain type of non-linear models which can be transformed to linear models are investigated. Some known methods in this field are studies, and a new method is suggested. An estimate with minimum MSE is given.

1 - المقدمة

في هذا البحث سوف تتم معالجة إحدى مشكلات التقدير التي تخص نوعاً معينا من النماذج غير الخطية ،ان عملية تقدير معالم هذا النوع المعين من النماذج غير الخطية تعتمد اعتمادا كليا على أساليب تقدير معالم النماذج الخطية ، والصفة الأساسية التي جعلتها كذلك هي أنها قابلة للتحويل إلى نماذج خطية.

هذه الحقيقة قد جعلت هذا النوع من النماذج غير الخطية يتميز باندراجه ضمن موضوعات النماذج الخطية ،بقوة اندراجه نفسها ضمن موضوعات النماذج غير الخطية وبالرغم من ذلك فإن مشكلة التقدير التي ستتم معالجتها في هذا البحث لم تظهر على الشكل

* جامعة بغداد كلية الإدارة والاقتصاد قسم الاحصاء

الذي نعنيه، ولم تحظ بالاهتمام الكافي لا في الكتب التي تعالج مشكلات التقدير في النماذج الخطية، ولا تلك الخاصة بالنماذج غير خطية.

ان نتائج التجاهل الذي تعاني منه هذه المشكلة، يمكن أن تظهر جليا من خلال تلك التقديرات غير الصحيحة التي تظهر في التطبيقات العملية. وكمثال على ذلك حالة تقدير الميل الحدي للاستهلاك في دالة استهلاك كوب و دوجلاص [5] . أن الميل الحدي للاستهلاك يعرف على انه $\beta\frac{y}{x}$ حيث جرت العادة تقدير هذا الميل عن طريق $\hat{\beta}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ على أساس أن $\hat{\beta}$ هي مقدرات طريقة المربعات الصغرى لمعالم نموذج دالة كوب و دوجلاص الخطأ هنا هو انه في الوقت الذي يكون فيه الهدف من تقدير الميل الحدي للاستهلاك هو دراسة العلاقة بين المتغيرات، فإن أسلوب التقدير هذا يقوم بإلغاء تلك العلاقة. فالمشكلة هنا هي في كيفية اختيار مقدر للمتغير العشوائي y وهنا يقع الخطأ ان مسألة تقدير المتغير y هي في الواقع التنبؤ بتلك القيمة عند النقطة x ومثلما هو معروف في الانحدار فإن افضل قيمة تنبؤية للمتغير y عند النقطة x هي التوقع $E(y|x)$ علما أن $E(y|x)=E(y)$.

وكما هو معروف فإن $\bar{y}$ هو في الواقع افضل متحيز للتوقع $E(y)$. من هنا يظهر خطأ التقدير الذي يحدث عند تقدير الميل الحدي للاستهلاك بتلك الطريقة المذكورة انفاً. اذ ان عملية التقدير هذه إنما تقوم بتقدير المتغير y عند عدم وجود علاقة مع المتغير x ، وهو ما يتنافى مع هدف تقدير الميل الحدي للاستهلاك. هذا وقد تناول البحث عملية التقدير هذه والتي ستتم عن طريق استخدام ما يسمى بالمقدر البسيط أو المقدر الأولي ، وأن هذا هو في الواقع يقدر الوسيط وليس الوسط الحسابي.

لقد تناولنا في البحث النماذج غير الخطية بالنسبة الى المعالم مثلاً $y=e^{\beta x+\varepsilon}$ والنموذج الأخير غير خطي بالنسبة الى المعالم والمتغيرات أيضاً. وكذلك يمكن اعتبار النموذج

$$Y=e^{\beta}X+\varepsilon \quad \ldots \text{(1-1)}$$

غير خطي بالنسبة الى المعالم.

إن أهم ما يميز النماذج غير الخطية من النماذج الخطية هو صعوبة تطبيق أساليب تقدير معالم النماذج الخطية لتقدير معالم النماذج غير الخطية بصورة مباشرة، ولذلك فإنه سيتم تقسيم النماذج غير الخطية على نوعين:

النوع الأول: يمثل النماذج غير الخطية القابلة للتحويل الى نماذج خطية وهي ما تسمى بالنماذج الخطية ضمنياً (Intrinsically Linear).

مثلاً $$Y=e^{\beta X+\varepsilon} \quad \ldots \text{(2-1)}$$

حيث يمكن اخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على نموذج خطي.

النموذج الثاني: هو الذي يمثل النماذج غير الخطية والتي هي غير قابلة للتحويل الى نماذج خطية والتي تسمى بالنماذج غير الخطية ضمنياً (Intrinsically Non-Linear)

مثلاً

$$Y = \beta_{\circ} + \beta_1 e^{\beta_2 X} + \varepsilon \quad \ldots (3\text{-}1)$$

1-1 هدف البحث:

ان هدف البحث قد تحدد في إعطاء صورة متكاملة لهذه المشكلة ومعالجتها من جانب والى محاولة تبسيط وتوضيح طريقة الفك (Expansion Method) بالقدر الذي تسمح به إمكانيات هذا البحث. وكذلك فان هدف البحث هو ايجاد مقدر جديد لمعالجة مشكلة البحث الخاصة بالنموذج اللوغاريتمي الطبيعي (The Lognormal Model).

2-1 أهمية البحث:

ان أهمية البحث تكمن في محاولة لاعطاء صورة مبسطة عن إحدى أهم الطرائق التي عالجت هذه المشكلة وهي طريقة الفك. وكذلك الأهمية الأخرى هو انه قد تم إيجاد طريقة جديدة لمعالجة مشكلة التقدير ، هذه الطريقة للنموذج اللوغاريتمي الطبيعي، حيث وكما سيتضح لاحقا ان الطريقة الجديدة اكثر كفاءة من الطرائق الأخرى التي عالجت هذه المشكلة.

3-1 مشكلة البحث:

في هذا البحث سوف يتم الاهتمام بإحدى مشكلات التقدير في النماذج غير الخطية التي هي خطية ضمنياً، أي قابلة للتحويل الى نماذج خطية

مثلاً:

$$Y = f(X\beta + e) \quad \ldots (4\text{-}1)$$

حيث ان:

Y	:	متغير الاستجابة.
$X = (X_1 X_2 \ldots X_{P-1})$	:	يمثل متجه المتغيرات التفسيرية.
β	:	متجه معالم النموذج.
ε	:	يمثل الخطأ العشوائي $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$.
f	:	دالة غير خطية بالنسبة الى المعالم.

نفترض ان هنالك دالة h ويمكن عن طريقها تحويل النموذج غير الخطي (1-4) إلى نموذج خطي وكالآتي:

$y = h(Y) = x\beta + \varepsilon$ ... (5-1)

لو اخذت نقطة معينه للمتغيرات التفسيرية ولتكن X_0 فإن توقع المتغير المعتمد في المعادلـــة (5-1) سيكون $E(y|x_*)$ حيث:

$E(y|x_*) = E\{h(y|x_*)\} = x_*\beta$ ...(6-1)

وبإستخدام طريقة المربعات الصغرى فإن تقدير المعالم يعرف بـــ $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$ وبنـــاءا عليه فإن المعادلة رقم (5-1) ستكون:

$\hat{y} = \hat{h}(y) = x\hat{\beta}$ ...(7-1)

حيث ان المعادلة (8-1) عند نقطة x_* ستكون :

$\hat{y}_* = x_*\hat{\beta}$

والان لنعالج مشكلة التقدير في معادلة (4-1) لتكن x_* نقطة معينة لمتجه المتغيرات التفسيرية والمطلوب تقدير توقع المتغير المعتمد عن هذه النقطة حيث:

$E(y|x_*) = E\{f(x_*\beta + \varepsilon)\}$ ...(8-1)

وللحصول على هذا المقدر عن طريق اعادة التحويل للنموذج التقديري الخطـــي فـــي (8-1) بواسطة دالة التحويل العكسية حيث.

$h^{-1}(\hat{y}_*) = f(x_*\hat{\beta})$ ...(9-1)

يعتبر كمقدر للتوقع في المعادلة (6-1) وهذا المقدر متحيز وليس متسق بالنسبة الى التوقع في معادلة (8-1) حيث.

$E\{f(x_*\beta + \varepsilon)\} \neq f(x_*\beta)$ ...(10-1)

لنفرض ان:

$\theta = E(Y|x_*) = E\{f(x_*\beta + \varepsilon)\}$ ... (11-1)

فالمشكلة الرئيسية في البحث تكمن في كيفية الحصول على المقدر $\hat{\theta}$ كمقدر لهذا التوقـــع، ان عملية تقدير معالم هذا النوع من النماذج غير الخطية يتم بعد تحويله الى نماذج خطيـــة وان عملية التقدير عادة تنتهي بإحصائيتين همـــا $\hat{\beta}$ و X_0 و $S^2 = \tilde{y}'(I - x(x'x)^{-1}x')y$ علـــى افتراض ان $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ و $x_*\hat{\beta} \sim N(x_*\beta, \sigma^2\lambda^2)$ حيث :

$\lambda^2 = x_*(X'X)^{-1}x_*'$ ...(12-2)

وكذلك:

$$\frac{S^2}{\sigma^2} \sim x^2(v)$$

حيث : $v = n - p$ ، n عدد مشاهدات العينه ، P عدد معالم النموذج المجهولة.

ان مشكلة التقدير الخاصة بهذا البحث تتمثل بكيفية استخدام هاتين الاحصائتين لتقدير التوقع θ في (11-1) وبمعنى آخر فإن مشكلة التقدير هذه تتمثل بكيفية الحصول على الدالة $\hat{\theta}(x_* \hat{\beta}, S^2)$ ، كدالة في هاتين الاحصائتين وكمقدر للتوقع في θ (11-1) .

ان مشكلة البحث قد تركزت على كيفية تقدير التوقع θ وكذلك ستقوم بتقدير تبـاين متغيـر الاستجابة عند النقطة x_*. ولنفترض ان التباين يمثل بدالة ϕ^2 لذا فإن.

$$\phi^2 = .\,[\ -.\,(\ |\ .\ )]^2 = .\,[\,.\,(x_*\beta + \varepsilon) - E\{f(x_*\beta + \varepsilon)\}]^2 \qquad ...(13\text{-}1)$$

حيث ان مشكلة التقدير ، في هذه الحالة ، سوف تعني ايضا محاولة للحصول علـى الدالـة $\hat{\phi}^2(x_* \hat{\beta}, S^2)$ كمقدر للتباين ϕ^2 في (13-1).

4-1 المشكلة في حالة التحويل اللوغاريتمي:

يعد النموذج اللوغاريتمي من اكثر النماذج انتشارا في الاستخدامات التطبيقية ومشكلة البحث الخاصة بهذا النموذج هي التي تكون فيها الدالة f هي الدالة الاسية أي:

$$y = e^{x\beta + \varepsilon} \qquad ...(14\text{-}1)$$

وكذلك فإن النموذج الخطي

$$y = \ln Y = x\beta + \varepsilon \qquad ...(15\text{-}1)$$

والتوقع θ سوف يكون

$$\theta = E(y|x_*) = E(e^{x_*\beta + \varepsilon}) = e^{x_*\beta + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad ...(16\text{-}1)$$

وبالاعتماد على خصائص التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي فإن :

$$(y = x_*\beta + \varepsilon) \sim N(x_*\beta, \sigma^2)$$

وكذلك فإن المقدر الاولي سيكون:

$$h^{-1}(\hat{y}_*) = e^{x_*\beta} \qquad ...(17\text{-}1)$$

وهذا المقدر هو مقدر متحيز وغير متسق لتوقع θ

$$Eh^{-1}(\hat{y}_*) = E(e^{x_*\hat{\beta}}) = e^{x_*\beta + \frac{\sigma^2 k^2}{2}} \qquad ...(18\text{-}1)$$

وفي الواقع ان المقدر (17-1) هو مقدر للوسيط وليس للتوقع في (16-1) .

4-1-1 الطرائق والمعالجات:

في الواقع هناك بعض الطرائق التي حاولت معالجة مشكلة التقدير المطروحة سابقا وتنقسم طرائق المعالجات إلى نوعين من المعالجات.

النوع الأول: هو تلك الطرائق التي حاولت إيجاد تقديرات عامة لأكثر من تحويل واحد هذه الطرائق هي طريقة الفك (Expansion Method)، طريقة المقدر المعيب (The Smearing Estimate Reducing Bias Method) .

النوع الثاني: هو تلك الطرائق التي حاولت أن توجد تقديرات لتحويل محدد، حيث تركزت هذه الطرائق حول تحويلين محددين هما التحويل اللوغاريتمي (The Logarithmic Transformation) وتحويلات القوى (The Power Transformation For(Box-Cox)).

2-1 طريقة الفك:

تعتبر طريقة الفك من أهم الطرائق وهي عمل أساسي في تحديد الحيز الكبير الذي تشغله هذه الطريقة، ولصعوبة وطول هذه الطريقة وما تتطلبه من رياضيات متقدمة سنترك للقارئ قراءة تفاصيلها في المصدر [5] .

2-2 طريقة المقدر المعيب:

تعتبر طريقة المقدر المعيب (The Smearing Estimate) الطريقة العامة الثانية بعد طريقة الفك لحل مشكلة التقدير الخاصة بهذا البحث. واهم ما يميز هذه الطريقة أنها تمثل البديل لتقدير التوقع θ في حالة أن توزيع الأخطاء غير معروف.
وعليه فإنه يطلق على هذه الطريقة بأنها طريقة لا معلميه لتقدير التوقع θ (A Non Parametric Method) ، أن أهمية هذه الطريقة تنبع من ملاحظة الافتراض الخاطئ بأن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا يؤدي دورا مختلفا في تقدير التوقع θ عن الدور الذي يؤديه في حالة تقدير معالم النموذج.
ففي تقدير معالم الانحدار سواء أكانت الأخطاء تتوزع طبيعياً أم لا فان تقديرات المربعات الصغرى هي تقديرات متسقة غير متحيزة وخطية ذات اقل تباين. وعندما يتم الافتراض بأن الاخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا بينما التوزيع الحقيقي غير طبيعي ، فإن هذا الافتراض سوف يؤثر في كفاءة التقدير فقط ، على أي حال لتقدير التوقع θ فان الاستخدام الخاطئ لفرضية التوزيع الطبيعي يمكن ان يقود الى تقديرات متحيزة وغير متسقة.

والفكرة الاساسية لهذه الطريقة هي ان يتم تقدير دالة التوزيع التراكمي الخاصة بالاخطاء العشوائية – وهي الدالة غير المعروفة – عن طريق دالة التوزيع التراكمي التجريبية الخاصة ببواقي الانحدار المقدر (The Ampirical Cdf of Estimated Regression Residuals) فإذا تمت

الاشارة الى دالة التوزيع التراكمي الخاصة بالاخطاء على انها الدالة $F[\varepsilon]$، فإن دالة التوزيع التراكمي التجريبية يمكن ان نشير اليها بالدالة $\hat{F}(\varepsilon)$ حيث تعرف هذه الدالة كما يأتي:

$$F_n(e)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\hat{\varepsilon}_i \le e) \qquad \dots (19\text{-}2)$$

حيث :

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - x_i\beta$: تشير الى بواقي المربعات الصغرى

$I_{(\cdot)}$: تشير الى دالة المؤثر (The Indicator Function)

3-2 طريقة تصغير التحيز:

تسعى هذه الطريقة الى تسهيل عملية معالجة تحيز التحويل عن طريق تصغير هذا التحيز والفكرة الاساسية لهذه الطريقة تعتمد على حقيقة معينة، هذه الحقيقة هي انه بالنسبة الى التحويلات الرتيبة (The Monotonic Transformation) فان وسيط الدالة هو دالة الوسيط.
وحيث ان المقدر الاولي هو $f\left(x_i\hat{\beta}\right)$ انما هو دالة في مقدر الوسيط $x_i\hat{\beta}$، فإن المقدر الاولي يقوم بتقدير وسيط متغير الاستجابة في النموذج الخطي وغير الخطي وليس توقع هذا المتغير. ان اهم ما يميز هذا المعامل (معامل التصحيح) هو انه يسعى قدر الامكان الى تقدير الفرق بين التوقع θ. ووفقاً لهذه الطريقة فقد جرت معالجة اربع حالات للنماذج غير الخطية والتي هي:

1- حالة التحويل اللوغاريتمي.
2- حالة تحويل الجذر التربيعي وغيره من القوى الكسرية.
3- حالة التحويل العكسي.
4- حالة تحويل القوى الكسرية العكسية.

4-2 طريقة المقدر الجديد:

ان هذا المقدر هو توسيع ، قام بـه الباحث، للمنطق الذي استخدمه الكاتبان (Teekens & Korts) حيث سيتم التخلي هنا عن الافتراض الذي يبنى عليه هذان الكاتبان طريقتهما ومن ثم وضع فرضية جديدة هي الفرضية المستخدمة في التطبيقات العملية، كما سنبين لاحقا. والفرضية الأساسية التي اعتمد عليها هذان الكاتبان هي انهما قد رأيا انه مثلما كانت العلاقة الرياضية بين المتغيرات التفسيرية ومتغير الاستجابة صحيحة في المعدل بالنسبة الى النموذج الخطي، فإن المفروض ان تكون هذه العلاقة صحيحة ايضا بالنسبة الى النموذج

النوع الاول: هو تلك الطرائق التي حاولت إيجاد تقديرات عامة لأكثر من تحويل واحد هذه الطرائق هي طريقة الفك (Expansion Method)، طريقة المقـدر المعيـب (The Smearing Estimate Reducing Bias Method) .

النوع الثاني: هو تلك الطرائق التي حاولت أن توجد تقديرات لتحويل محدد، حيث تركزت هذه الطرائق حول تحويلين محـددين همـا التحويـل اللوغـاريتمي (The Logarithmic Transformation) وتحويلات القوى (The Power Transformation For(Box-Cox)).

2-1 طريقة الفـك:

تعتبر طريقة الفك من أهم الطرائق وهي عامل أساسي في تحديد الحيز الكبير الـذي تشغله هذه الطريقة، ولصعوبة وطول هذه الطريقة وما تتطلبه من رياضيات متقدمة سـنترك للقارئ قراءة تفاصيلها في المصدر [5] .

2-2 طريقة المقدر المعيب:

تعتبر طريقة المقدر المعيب (The Smearing Estimate) الطريقة العامة الثانيـة بعـد طريقة الفك لحل مشكلة التقدير الخاصة بهذا البحث. واهم ما يميز هذه الطريقة أنهـا تمثـل البديل لتقدير التوقع θ في حالة أن توزيع الأخطاء غير معروف.

وعليه فإنه يطلق علـى هـذه الطريقـة بأنهـا طريقـة لا معلميـه لتقـدير التوقـع θ (A Non Parametric Method) ، أن أهمية هذه الطريقة تنبع من ملاحظة الافتراض الخاطـأ بأن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا يؤدي دورا مختلفا في تقدير التوقع θ عن الـدور الـذي يؤديه في حالة تقدير معالم النموذج.

ففي تقدير معالم الانحدار سواء أكانت الأخطاء تتوزع طبيعياً أم لا فان تقـديرات المربعـات الصغرى هي تقديرات متسقة غير متحيزة وخطية ذات اقل تباين. وعندما يتم الافتراض بأن الاخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا بينما التوزيع الحقيقي غير طبيعي ، فإن هذا الافتراض سوف يؤثر في كفاءة التقدير فقط ، على أي حال لتقدير التوقع θ فان الاستخدام الخاطـأ لفرضـية التوزيع الطبيعي يمكن ان يقود الى تقديرات متحيزة وغير متسقة.

والفكرة الاساسية لهذه الطريقة هي ان يتم تقدير دالة التوزيع التراكمي الخاصـة بالاخطـاء العشوائية – وهي الدالة غير المعروفة –عن طريق دالة التوزيع التراكمي التجريبية الخاصة ببواقي الإنحدار المقدر (The Ampirical Cdf of Estimated Regression Residuals) فإذا تمت

الاشارة الى دالة التوزيع التراكمي الخاصة بالإخطاء على انها الدالة $F[\varepsilon]$، فإن دالة التوزيع التراكمي التجريبية يمكن ان نشير اليها بالدالة $\hat{F}(\varepsilon)$ حيث تعرف هذه الدالة كما يأتي:

$$F_n(e)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\cdot_i \le e) \qquad \dots (19\text{-}2)$$

حيث :

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - x_i\beta$: تشير الى بواقي المربعات الصغرى

$I_{(\cdot)}$: تشير الى دالة المؤثر (The Indicator Function)

3-2 طريقة تصغير التحيز:

تسعى هذه الطريقة الى تسهيل عملية معالجة تحيز التحويل عن طريق تصغير هذا التحيز والفكرة الاساسية لهذه الطريقة تعتمد على حقيقة معينة، هذه الحقيقة هي انه بالنسبة الى التحويلات الرتيبة (The Monotonic Transformation) فان وسيط الدالة هو دالة الوسيط. وحيث ان المقدر الاولي هو $f\left(x_{\circ}\hat{\beta}\right)$ انما هو دالة في مقدر الوسيط $x_{\circ}\hat{\beta}$، فإن المقدر الاولي يقوم بتقدير وسيط متغير الاستجابة في النموذج الخطي وغير الخطي وليس توقع هذا المتغير. ان اهم ما يميز هذا المعامل (معامل التصحيح) هو انه يسعى قدر الامكان الى تقدير الفرق بين التوقع θ. ووفقاً لهذه الطريقة فقد جرت معالجة اربع حالات للنماذج غير الخطية والتي هي:

1- حالة التحويل اللوغاريتمي.
2- حالة تحويل الجذر التربيعي وغيره من القوى الكسرية.
3- حالة التحويل العكسي.
4- حالة تحويل القوى الكسرية العكسية.

4-2 طريقة المقدر الجديد:

ان هذا المقدر هو توسيع ، قام به الباحث، للمنطق الذي استخدمه الكاتبان (Teekens & Korts) حيث سيتم التخلي هنا عن الافتراض الذي يبنى عليه هذان الكاتبان طريقتهما ومن ثم وضع فرضية جديدة هي الفرضية المستخدمة في التطبيقات العملية، كما ستبين لاحقا. والفرضية الأساسية التي اعتمد عليها هذان الكاتبان هي انهما قد رأيا انه مثلما كانت العلاقة الرياضية بين المتغيرات التفسيرية ومتغير الاستجابة صحيحة في المعدل بالنسبة الى النموذج الخطي، فإن المفروض ان تكون هذه العلاقة صحيحة ايضا بالنسبة الى النموذج

اللوغاريتمي الطبيعي. ان هذه الفرضية تعني ، انه مثلما كانت العلاقة في النموذج الخطي تحدد على اساس ان:

$$E(y|x) = x\beta \quad ...(20\text{-}2)$$

فإن المفروض ان تكون هذه العلاقة صحيحة في النموذج اللوغاريتمي الطبيعي أيضا حيث تبنى على أساس ان:

$$E(Y|X) = e^{x\beta} \quad ...(21\text{-}2)$$

ولكي يكون هذا الافتراض صحيحا فإن الخطأ العشوائي يجب ان يتحدد بحيث يكون:

$$Ee^{\varepsilon} = 1 \quad ...(22\text{-}2)$$

هذا يعني ان يكون توقع الخطأ العشوائي هو $\frac{\sigma^2}{2}$ وبحيث تصبح عملية التقدير في هذه الحالة قائمة على أساس الافتراض ان:

$$\varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \quad ...(24\text{-}2)$$

ولكي تتم عملية بناء هذا المقدر ، فإنه سيتم استخدام فرضية مرحلية ، بحيث يتم التخلي عنها لاحقا. والفرضية هذه هي ان σ^2 معلومة. والفكرة الاساسية وراء ايجاد هذا المقدر هي اختيار فصل التقديرات (The Class of Estimates) الذي سيطلق عليه بالفصل C والذي يعرف كالاتي:

$$C = \left\{ e^{x_i\beta + \alpha\sigma^2} \qquad -\infty < \alpha < \infty \right\} \quad ...(25\text{-}2)$$

بحيث ان مهمة بناء المقدر الجديد ، تتمثل باختيار ذلك المقدر الذي ينتمي الى الفصل C والذي يحصل على اقل دالة (MSE). في هذه الحالة ، يمكن ان ينظر الى عملية ايجاد هذا المقدر على انها كما يأتي:

يوجد المقدر

$$\hat{\theta}' = e^{x_i\hat{\beta} + \alpha\sigma^2} \quad ...(26\text{-}2)$$

والمطلوب اختيار قيمة α التي تجعل دالة (MSE) الخاصة بهذا المقدر اقل ما يمكن فإذا تمت الإشارة إلى دالة الـ (MSE) الخاصة بهذا المقدر على أنها الدالة $\overline{\pi}'$ فإن هذه الدالة يمكن أن تعرف كما يأتي:

$$\overline{\pi}' = e^{2x_i\beta + 2\sigma^2\lambda^2 + 2\alpha\sigma^2} - 2e^{2x_i\beta + \frac{\sigma^2}{2}(1-\lambda^2+2\alpha)} + e^{2x_i\beta + \sigma^2} \quad ...(27\text{-}2)$$

ولكي يتم اختيار قيمة α التي تجعل قيمة هذه الدالة اقل ما يمكن فإنه ستتم مفاضلة هذه الدالة بالنسبة الى المعلمة α ومساواة مشتقتها التفاضلية الأولى بالصفر ومن السهولة ملاحظة أن :

$$\frac{d\overline{\pi}'}{d\alpha} = 2e^{2x_i\beta}\left[e^{2\sigma^2(\lambda^2+\alpha)} - e^{\frac{\sigma^2}{2}(1-\lambda^2+2\alpha)} \right] \quad ...(28\text{-}2)$$

ومن ثم فانه ليس صعبا أن نجد قيمة α التي تجعل قيمة هذه المشتقة مساوية للصفر والتـــي هي:

$$\alpha_* = \frac{1}{2}\left(1-3\lambda^2\right) \qquad ...(29-2)$$

وللتأكد من أن نقطة النهاية هذه هي نقطة نهاية صغرى ، يمكن إيجاد المشتقة التفاضلية الثانية عند هذه النقطة حيث من السهل أن نجد :

$$\frac{d\pi'}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha_*} = 4\sigma^4 e^{2x_*\beta}\left[e^{\sigma^2(1-\lambda^2)} - \frac{1}{2}e\sigma^{2(1-\lambda^2)}\right] \geq 0 \qquad ...(30-2)$$

واذ يوضح هذا أن تلك النهاية هي فعلا نهاية صغرى.

الآن بالإمكان القول انه تحت الافتراض بأن σ^2 معلومة، فإن المقدر الجديد الحاصل علــى اقل دالة (MSE) في فصل التقديرات المحدد في (2-25) هو:

$$\hat{\theta}' = e^{x_*\hat{\beta} + \frac{\sigma^2}{2}\left(1-3\lambda^2\right)} \qquad ...(31-2)$$

ولان σ^2 هي في الواقع غير معلومة، أي مع التخلي عن الفرضية المرحلية التي تم تحديـــدها سابقا فإن إيجاد المقدر الجديد يتطلب تقدير الدالة.

$$e^{\frac{\sigma^2}{2}\left(1-3\lambda^2\right)} \qquad ...(32-2)$$

ولتقدير هذه الدالة فإنه يوجد بديلان:

البديل الأول هو استخدام المقدر المتسق لهذه الدالة وهو

$$e^{\frac{S^2}{2v}\left(1-3\lambda^2\right)} \qquad ...(33-2)$$

أما البديل الأخر ، فإنه المقدر غير المتحيز الذي أوجده فيني [8] والمتمثل بالدالة:

$$g\left\{\frac{\sigma^2}{2}\left(1-3\lambda^2\right)\right\} \qquad ...(34-2)$$

حيث أن

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k(v+2k)}{v(v+2)\ldots(v+2k)}\left(\frac{v}{v+1}\right)^k \frac{1}{k!}t^k \qquad ...(35-2)$$

وان

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{v}$$

و الآن إذا تم الافتراض بان الدالة في (2-33) هي التي تم اختيارها كمقدر للدالة فـــي (2-32) فان المقدر الجديد كما يأتي:

$$\hat{\theta}_{(1)} = e^{x_*\hat{\beta} + \frac{S^2}{2v}\left(1-3\lambda^2\right)} \qquad ...(36-2)$$

حيث ستكون دالة الـــ(MSE) الخاصة بالمقدر هذا هي:

$$\bar{\pi}_{(1)} = e^{2x_i\beta}\left[e^{2\sigma^2\lambda^2}\left(1-2\sigma^2\frac{(1-3\lambda^2)}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}} - 2e^{\frac{\sigma^2}{2}(1-\lambda^2)}\left(1-\sigma^2\frac{(1-3\lambda^2)}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}} + e^{\sigma^2}\right] \quad \ldots(37\text{-}2)$$

أما إذا تم اختيار الدالة (2-34) كمقدر في(2-32) فان المقدر الجديد سيكون كالاتي:

$$\hat{\theta}_{(2)} = e^{x_i\beta} g\left(\frac{\sigma^2}{2}(1-3\lambda^2)\frac{\nu+1}{\nu}\right) \quad \ldots(38\text{-}3)$$

وبحيث تكون دالة الــ(MSE) الخاصة بهذا المقدر هي:

$$\bar{\pi}_{(2)} = e^{2x_i\beta}\left[e^{2\sigma^2\lambda^2} G\left(\frac{\sigma^2}{2}(1-3\lambda^2)\right) - 2e^{\sigma^2(1-\lambda^2)} + e^{\sigma^2}\right] \quad \ldots(39\text{-}2)$$

حيث أن $G(t)$ هي الدالة التي أوردها الكاتبان (Bradu & Mundlak) [2] والموجوده في تباين مقدر Finney حيث تعرف هذه الدالة على أنها:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k\right)}\left(\frac{\nu+2k-2}{k}\right)t^k \quad \ldots(40\text{-}2)$$

إن السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو، أي المقدرين في (2-36) و(2-37) يمكن اختياره على انه المقدر الجديد ؟

ومن الواضح أن الإجابة عن هذا السؤال تكمن في دالة الــ(MSE) الخاصة بهذين المقدرين بحيث أن المقدر الذي يحصل على اقل دالة (MSE) هو المقدر الذي سيتم اختياره.

وبالعودة إلى دالتي الــ(MSE) في و (2-37)و(2-39) فانه من الواضح ان عملية المقارنة بينهما تحليليا عملية شديدة الصعوبة نتيجة للتعقيدات التي تكتنف هاتين الدالتين. ولكن بالرغم من ذلك فانه بالإمكان ملاحظة انه عندما تكون $\lambda^2 = \frac{1}{3}$ فهذا يعني ان هاتين الدالتين متساويتان وهو ما يعني ان هذه النقطة تمثل نقطة تحول للنسبة بين هاتين الدالتين من كمية اقل من الواحد إلى كمية اكبر من الواحد أو العكس . ولذلك، فقد تم عمل جدول هو الجدول (1) حيث يوضح هذا الجدول النسبة $\left(\bar{\pi}_{(2)}/\bar{\pi}_{(1)}\right)$ لبعض القيم حول النقطة $\lambda^2 = \frac{1}{3}$ وعند القيم $\left(\sigma^2 = 0.25, 0.5, 1\right)$ و $(\nu = 5, 10, 15)$.

ومن الواضح من خلال هذا الجدول انه في الفترة التي تكون فيها $\lambda^2 \leq \frac{1}{3}$ فان $\bar{\pi}_{(2)}$ اصغر من $\bar{\pi}_{(1)}$ وفي الفترة التي تكون فيها $\lambda^2 > \frac{1}{3}$ فان $\bar{\pi}_{(1)}$ اصغر من $\bar{\pi}_{(2)}$.

بناءً عليه يمكن ان يتم اختيار المقدر الجديد كمزيج من المقدرين في (2-36) و (2-38) بحيث يقال ان هذا المقدر هو:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} = \hat{\theta}_{(2)} & IF \quad 0 < \lambda^2 \le \frac{1}{3} \\ = \hat{\theta}_{(1)} & IF \quad \lambda^2 > \frac{1}{3} \end{cases} \quad ...(41\text{-}2)$$

الجدول (1) : يوضح النسبة $\left(\bar{\pi}_{(2)}/\bar{\pi}_{(1)}\right)$ الخاصة بالمقدرين المكونين للمقدر الجديد

ν	5			10			15		
	0.25	0.50	1.00	0.25	0.50	1.00	0.25	0.50	1.00
.04	.97	.89	.68	.99	.97	.88	1.00	.98	.94
.08	.99	.95	.81	1.00	.99	.94	1.00	.99	.97
.12	1.00	.98	.91	1.00	.99	.98	1.00	1.00	.99
.18	1.00	.99	.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.20	1.00	1.00	.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.32	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.33	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.35	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.40	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.45	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.50	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
.55	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
.60	1.01	1.00	1.02	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
.65	1.01	1.00	1.02	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
.70	1.01	1.01	1.03	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
.75	1.01	1.02	1.03	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
.80	1.01	1.02	1.04	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.01
.85	1.01	1.02	1.04	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00	1.01
.90	1.01	1.03	1.05	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00	1.01
.95.	1.01	1.03	1.05	1.01	1.01	1.02	1.00	1.00	1.01
1.00	1.01	1.03	1.05	1.01	1.01	1.02	1.00	1.01	1.01

ν = درجات الحرية

=تباين المتغير التحويلي

=هي المعرفة سابقا

اتساق المقدر الجديد

سوف تتم البرهنة على أن المقدر الجديد متسق بإستخدام النظرية (1) انظر الملحق. وبالرغم من انه بالإمكان إثبات اتساق كلا المقدرين المكونين للمقدر θ في (2-41) فانه سيتم الاكتفاء بإثبات أن المقدر $\hat{\theta}_2$ متسق، وذلك لان المقدر هو الذي يغطي الفترة التي تقترب فيها λ^2 من الصفر، على أساس انه عندما $n \longrightarrow \infty$ فإن $\lambda \longrightarrow 0$.

والآن يمكن ملاحظة أن :

$$E(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}_2) = E e^{x_*\hat{\beta}} Eg\left\{\frac{\nu+1}{\nu}(1-3\lambda^2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\nu}\right\}$$
$$= e^{x_*\beta+\frac{\sigma^2}{2}(1-2\lambda^2)} \qquad \ldots (42\text{-}2)$$

بحيث يكون:

$$\lim_{n\to\infty} h \quad E(\hat{\theta}) = e^{x_*\beta+\frac{\sigma^2}{2}} = \theta \qquad \ldots (43\text{-}2)$$

وكذلك فإنه من السهل بيان أن:

$$E(\hat{\theta}^2) = e^{2x_*\beta+2\sigma^2\lambda^2} G\left\{\frac{\sigma^2}{2}(1-3\lambda^2)\right\} \qquad \ldots (44\text{-}2)$$

بحيث انه في حالة اعتماد كل من (2-43) و (2-45) يكون:

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - \{E(\theta^2)\}^2 = e^{2x_*\beta}\left[e^{2\sigma^2\lambda^2} G\left\{\frac{\sigma_2}{2}(1-3\lambda^2)\right\} - e^{\sigma^2(1-2\lambda)}\right] \qquad \ldots (45\text{-}2)$$

ومع ملاحظة انه يمكن إثبات أن:

[7] $$\lim_{n\to\infty} \quad G_\nu(t) = e^{2t} \qquad \ldots (46\text{-}2)$$

فإنه يصبح و اضحا أن:

$$\lim_{n\to\infty} \quad Var(\hat{\theta}) = e^{2x_*\beta}\left\{ e^{\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right\} = 0 \qquad \ldots (47\text{-}2)$$

ومن (2-44) و (2-47) يكون إثبات اتساق هذا المقدر قد اكتمل.

5-2 طريقة Meulenberg

تسعى هذه الطريقة إلى إيجاد مقدرات اكثر بساطة في محاولة لتلافي التعقيدات التي اكتشفت في طريقة Finney [8] ، وقد أورد الكاتب Meulenberg المقدر:

$$\hat{\theta} = e^{x_*\hat{\beta}+(1-\lambda^2)\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \ldots (48\text{-}2)$$

على انه المنسق للتوقع θ المحدد في (1-17) .

3- مقارنات بين الطرائق بإستخدام بيانات واقعية:

ملاحظة : طريقة الفك وطريقة Finney تقدمان التقدير غير المتحيــز ذي الأقــل تبــاين والذي يشار إليه بالحروف (MVU) .

إن عملية المقارنة ستقوم على أساس مقارنة دوال الــ (MSE) الخاصة بكــل مقــدر مــن المقدرات السابقة مع ملاحظة انه بالنسبة الى المقدر (MVU) فإن دالة (MSE) هي نفســها تباين هذا المقدر، حيث سيتم التعبير عن هذه الدوال كالآتي:

$\overline{\pi}$ تشير إلى دالة (MSE) الخاصة بالمقدر الجديد.

. تشير إلى دالة (MSE) الخاصة بالمقدر (MVU) .

. تشير إلى دالة (MSE) الخاصة بالمقدر Meulenberg .

. تشير إلى دالة (MSE) الخاصة بمقدر تصغير التحيز.

لقد تم عمل جداول بالنسبة الى الدالة (MSE) الخاصة بمقــدري Meulenberg وتصــغير التحيز إلى دالة الــ(MSE) الخاصة بالمقدر الجديد.

عند القيم $\left(\sigma^2 = 0.10, 0.25, 0.5, 1 \quad v = 5, 10, 15\right)$ ولبعض قيم λ^2 فــي الفتــرة $\left(0 \le \lambda^2 \le 5\right)$ ونلاحظ من تلك الجداول أن المقدر الجديد اكثر كفاءة من كل مــن مقــدري Meulenberg وتصغير التحيز، حيث أن النسبة اكبر من الواحد لكل القيم الموجودة في تلك الجداول وكــذلك إن المقدر الجديد اكثر كفاءة من المقدر (MVU) لكل القيم

$, \; ^2 \ge \frac{1}{2} \qquad = 1,2,\ldots \quad 0 \quad , \; ^2 \quad .$

الجدول (2) : يوضح النسبة دالة (MSE) الخاصة بمقدر تصاغير التحيز

دالة (MSE) الخاصة بالمقدر الجديد

V	5				10				15			
σ^2 / λ^2	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00
0.05	1.00000	1.18182	1.4648	2.399	1.00000	1.10553	1.0462	1.60	1.00000	1.0556	1.1157	1.42
1.10	1.09091	1.19444	1.5455	2.738	1.09091	1.1515	1.2857	1.79	1.09091	1.1212	1.241	1.53
0.15	1.05882	1.24000	1.6077	2.993	1.05882	1.1429	1.3680	1.98	1.00000	1.1458	1.290	1.75
0.20	1.09091	1.26563	1.6503	2.230	1.03571	1.1905	1.4250	2.15	1.04545	1.1587	1.373	1.91
0.25	1.07143	1.28205	1.7041	3.425	1.09091	0.1218	1.4872	2.33	1.03571	1.1923	1.426	2.10
0.30	109091	1.31522	1.7532	3.621	1.10526	1.2500	1.5590	2.53	1.06061	1.2283	1.502	2.30
0.35	1.10526	1.32407	1.8113	3.838	1.11628	1.2593	1.6226	2.76	1.10526	1.2407	1.566	2.52
0.40	1.13953	1.35246	1.8700	4.062	1.10204	1.3033	1.6900	2.99	1.11628	1.2787	1.640	2.75
0.45	1.2245	1.37226	1.9315	4.312	1.12963	1.3285	1.7642	3.25	1.10204	1.3066	1.724	3.01
0.50	1.14815	1.38562	1.9893	4.584	1.13333	1.3487	1.8428	3.54	1.12963	1.3355	1.799	3.29
0.55	1.13333	1.41667	2.0587	4.895	1.13846	1.3772	1.9303	3.84	1.11667	1.3735	1.888	3.60
0.60	1.15385	1.45055	2.1326	5.248	1.15714	1.4144	2.0114	4.19	1.15625	1.4111	1.977	3.94
0.65	1.15493	1.63483	2.2100	5.626	1.17333	1.4513	2.1021	4.56	1.15714	1.4359	1.071	4.32
0.70	1.32836	1.49765	2.2896	6.057	1.17284	1.4739	2.1968	4.98	1.17333	1.4737	2.173	4.74
0.75	1.17073	1.51965	2.3841	6.514	1.18605	1.5067	2.2966	4.42	1.17284	1.5112	2.280	5.19
0.80	1.18391	1.54918	2.4703	7.021	1.19562	1.5439	2.3972	5.92	1.20000	1.5551	2.385	5.70
0.85	1.18280	1.57915	2.5648	7.567	1.19565	1.6327	2.5100	6.47	1.19780	1.5920	2.505	6.24
0.90	1.20408	1.60727	2.6707	8.163	1.21875	1.6552	2.6276	7.60	1.21875	1.6226	2.617	6.85
1.95	1.10192	1.63793	2.7701	8.808	1.22549	1.6584	2.7436	7.71	1.21569	1.6595	2.747	7.52
1.00	1.22018	1.66667	2.8849	9.508	1.23364	1.6949	2.8689	8.42	1.24528	1.7079	2.882	8.24
1.5	1.30909	2.03720	4.3010	20.062	1.35220	2.1276	4.5046	20.25	1.36076	2.1635	4.603	20.68
2	1.42273	2.50083	6.3810	39.434	1.47867	2.6679	7.0364	47.54	1.50000	2.7403	7.332	51.44
2.5	1.54545	3.07333	9.2964	70.333	1.62452	3.3564	10.9307	106.82	1.65234	3.4725	11.649	125.79
3	1.68389	3.76734	13.2361	11.389	1.77492	4.2096	16.8360	226.76	1.82178	4.4013	18.400	299.74
3.5	1.83029	4.06250	18.3799	168.787	1.95251	5.2692	25.6404	448.82	2.03790	5.5565	28.962	689.46
4	1.98402	5.58054	24.8637	234.692	2.14604	6.5798	38.5716	823.06	2.20918	7.0235	45.295	1512.06
4.5	1.15886	6.73743	32.7619	311.076	2.34889	8.2100	57.2959	1401.85	2.43548	8.8477	70.427	3127.57
5	1.34991	8.08131	42.1544	398.604	2.57895	10.2028	83.7623	2237.49	2.68000	11.1333	108.726	

الجدول (3) : يوضح النسبة دالة (MSE) الخاصة بمقدر Meulenberg

دالة (MSE) الخاصة بالمقدر الجديد

V	5				10				15			
σ^2 / λ^2	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00
0.05	1.00000	1.09091	1.33333	1.9938	1.00000	1.05263	1.13846	1.3991	1.00000	1.05556	1.0980	1.2653
1.10	1.09091	1.11111	1.32323	1.9738	1.09091	1.09091	1.15385	1.4268	1.00000	1.06061	1.1264	1.3077
0.15	1.05882	1.12000	1.31538	1.9290	1.00000	1.06122	1.17600	1.4600	1.00000	1.06250	1.1371	1.3433
0.20	1.04545	1.12500	1.30061	1.8899	1.04545	1.09524	1.19375	1.4795	1.04545	1.07937	1.1709	1.3794
0.25	1.03571	1.12821	1.29592	1.8420	1.00000	0.10897	1.20513	1.5041	1.00000	1.08974	1.1795	1.4224
0.30	1.03030	1.14130	1.29004	1.8034	1.03030	1.10870	1.22707	1.5347	1.03030	1.10870	1.2052	1.4702
0.35	1.05263	1.12963	1.29434	1.7818	1.05263	1.10185	1.23774	1.5755	1.05263	1.10185	1.2226	1.5175
0.40	1.06977	1.13934	1.29667	1.7672	1.04651	1.12295	1.25333	1.6098	1.04651	1.11475	1.2400	1.5633
0.45	1.04082	1.13869	1.30060	1.7647	1.04082	1.12409	1.27164	1.6523	1.04082	1.12409	1.2673	1.6210
0.50	1.05556	1.13725	1.30295	1.7694	1.05556	1.3772	1.29268	1.7019	1.05556	1.3355	1.2880	1.6811
0.55	1.05000	1.13690	1.31296	1.7871	1.05000	1.13772	1.34592	1.7517	1.05000	1.14458	1.3142	1.7415
0.60	1.06154	1.15385	1.32360	1.8161	1.04615	1.15470	1.33410	1.8101	1.06250	1.15556	1.3387	1.8070
0.65	1.04225	1.28090	1.33680	1.8477	1.05714	1.16410	1.35745	1.8724	1.05714	1.16410	1.3619	1.8813
0.70	1.19403	1.15962	1.34749	1.8920	1.06667	1.16588	1.37972	1.9396	1.06667	1.17703	1.3916	1.9598
0.75	1.04878	1.16157	1.36775	1.9374	1.06173	1.17778	1.40185	2.0098	1.06173	1.18834	1.4216	2.0394
0.80	1.05747	1.16803	1.38200	1.9917	1.06977	1.19247	1.42882	2.0892	1.08235	1.20339	1.4474	2.1286
0.85	1.05376	1.17375	1.40000	2.0486	1.06522	1.24082	1.45667	2.1705	1.07692	1.21600	1.4814	2.2182
0.90	1.06122	1.17818	1.42337	2.1120	1.08333	1.24138	1.48494	2.2587	1.08333	1.22264	1.5064	2.3182
1.95	1.05769	1.18621	1.44109	2.1794	1.07843	1.22420	1.51282	2.3499	1.07843	1.23297	1.5407	2.4219
1.00	1.06422	1.19281	1.46575	2.2522	1.08411	1.24729	1.54179	2.4481	1.09434	1.25430	1.5758	2.5303
1.5	1.08485	1.28665	1.74557	3.1915	1.12579	1.35963	1.89786	3.7718	1.13291	1.38626	1.9598	4.0058
2	1.11818	1.40496	2.11283	4.4380	1.16114	1.50357	2.36356	5.8878	1.17788	1.54512	2.4697	6.4743
2.5	1.15636	1.54667	2.55599	5.8167	1.21073	1.67599	2.96669	9.0541	1.23047	1.72936	3.1370	10.5146
3	1.19453	1.70805	3.06247	7.1192	1.25402	1.87247	3.73016	13.4665	1.28383	1.94305	3.9961	16.9441
3.5	1.24021	1.88932	3.61978	8.2050	1.31006	2.09677	4.67952	19.0654	1.36152	2.18471	5.1088	26.7933
4	1.28311	2.08389	4.20893	9.0445	1.36881	2.35030	5.83998	25.4807	1.40306	2.46581	6.5285	41.0221
4.5	1.33198	2.29808	4.80644	9.6787	1.48988	2.64091	7.24492	32.1765	1.46774	2.78094	8.3366	60.1086
5	1.38858	2.52656	5.39564	10.1667	1.48988	2.96411	8.89729	38.6809	1.53684	3.14155	10.6180	83.7513

كذلك تمت المقارنة وتطبيقها باستخدام بيانات واقعية وذلك لاختيار النموذج الملائم لظـاهرة معينة من بين مجموعة من النماذج.

الفكرة الأساسية لهذا التطبيق هي أن تتم تجزئة العينة إلى جزأين حجم الجـزء الأول هـو n_1 وحجم الجزء الثاني هو n_2 .

ومن بيانات الجزء الأول من العينة (n_1) يتم إيجاد المقدر $\hat{\theta}$ ، ومن ثم يتم اسـتخدام هـذا المقدر لإيجاد قيم تنبؤية مقابلة لقيم مفردات الجزء الثاني من العينة (n_2) . بعـد ذلـك يـتم احتساب معدل مربعات انحرافات القيم التنبؤية عن القيم الحقيقية الخاصة بمفـردات الجـزء الثاني من العينة (n_2) ويطلق على هذا المعدل بمعدل مربعات خطأ التنبؤ :

(The Average Squared Prediction Error)

حيث يشار إليه بـ(ASPE) ويساوي:

$$(ASPE) = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\hat{\theta}_i - Y_i\right)^2$$

وللاختيار بين مجموعة من النماذج ، فإن الذي يحصل على اقل قيمة للخطأ (ASPE) هـو النموذج الأكثر ملاءمة.

لقد قام الكاتب (Duan) بعملية مقارنة بين كـل مـن المقـدر المعيـب والمقـدر (MVU) والمقدر (Meulenberg) ومقدر تصغير التحيز، وقد تم استخدام كل مـن معيـار (ASPE) ومعيار التحيز النسبي للمقارنة بين تلك المقدرات ويعرف التحيز النسبي بـانه:

$$\text{التحيز النسبي} = \frac{\text{معدل القيم التنبؤية للمقدر } \hat{\theta} - \text{معدل القيم الحقيقية}}{\text{معدل القيم الحقيقية لمتغير الاستجابة}}$$

وعلى هذا الأساس تم احتساب المعدل على مفردات الجزء الثاني من العينـة n_2. علمـا أن المقدر الذي يحصل على اقل قيمة للخطأ (ASPE) وأيضا اقل قيمة للتحيز النسبي ، يكـون مناسبا اكثر لاستخدامه في عملية اختيار النموذج الملائم .

لقد قمنا بالمقارنة بين كل من المقدر (MVU) والمقـدر(Meulenberg) ومقـدر تصـغير التحيز والمقدر المعيب وأخيرا المقدر الجديد بإستخدام كل مـن المعيـارين فـي (3-44) و (45-3) .

والجدول (4) يوضح بيانات الدخل والرقم القياسي للأسعار والإنفاق على المواد الغذائية في العراق للسنوات (1971-1990) وبالأسعار الثابتة للعام (1980) .

وقد أخذت هذه البيانات دراسة موسعة لعملية تقدير الطلب على المواد الغذائية، حيث تم استخدام هذه البيانات لتقدير دالة الطلب على المواد الغذائية حيث :

$$Y = \beta_{\circ} X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

علماً أن:

Y : متوسط إنفاق الفرد السنوي على المواد الغذائية بالأسعار الثابتة لسنة 1980.

X_1 : مجموع الإنفاق الكلي.

X_2 : الرقم القياسي لأسعار المواد الغذائية بأساس سنة 1980 .

الجدول (4) : يوضح متوسط إنفاق الفرد على المواد الغذائية ومجموع الإنفاق الكلي بالأسعار الثابتة لسنة (1980) للمدة (1971-1990) (بالدينار) فضلا عن الرقم القياسي لأسعار المواد الغذائية للمدة نفسها.

الرقم القياسي لأسعار المواد 1980=100	مجموع الإنفاق الكلي	متوسط إنفاق الفرد	السنوات
45.2	221.498	109.646	1971
47.5	178.374	81.373	1972
50.2	249.723	107.048	1973
55.8	252.889	108.780	1974
60.6	256.722	109.919	1975
67.3	260.745	111.210	1976
72.8	261.005	111.238	1977
67.3	262.715	111.147	1978
72.8	314.648	123.889	1979
100.0	313.116	125.976	1980
125.0	312.870	112.624	1981
142.7	349.388	134.664	1982
161.9	347.434	136.43	1983
171.2	351.886	143.083	1984
175.3	339.852	139.973	1985
176.6	339.071	137.035	1986
271.3	330.567	126.374	1987
234.1	304.125	140.653	1988
286.9	317.992	126.143	1989
421.0	304.031	140.658	1990

من الجدول المذكور انفا تم تقسيم العينة (n=20) إلى جزأين هما ($n_1=15$) وهي مشـــاهدات الســـنوات (1971-1981) فضـــلا عـــن الســـنوات مـــن (1983-1986) . أمـــا الجـــزء الثاني ($n_2=5$). فهو مشاهدات كل من السنة (1982) وكذلك السنوات (1987-1990) ومن بيانات الجزء الأول ($n_1=15$) تم تقدير معالم النموذج التحويلي الاتي:

$$y=\ln\beta_{o1}+\beta_1x_1+\beta_2x_2+e \qquad \ldots (51\text{-}3)$$

حيث أن:

Y = ln Y

$$x_1=\ln X1$$
$$x_2=\ln X_2$$

وتم الحصول على النموذج التقديري التالي:

$$\hat{y}_i=0.584 + 0.75\ x_1 - 0.0014\ x_2$$
$$(0.687) \quad (0.1647) \quad (0.06294)$$
$$\sigma^2 0.05008 \qquad R2=0.894$$
$$Durbin\ \ Watson=1.56$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}186.336 & -44.2 & 14.03\\ -44.2 & 10.815 & -3.743\\ 14.03 & -3.743 & 1.579\end{bmatrix}$$

كذلك تم الحصول على القيم التنبؤية للمتغير Y_i وفقا للمقدرات التي تم تحديدها سابقا حيث من خلال تلك القيمة تم احتساب كل من الخطأ (ASPE) والتحيز النسبي لكل من المقدرات السابقة وجدول (5) يوضح قيم المقدرات المختلفة.

الجـــدول (5): قيم المقدرات المختلفة.

المقدر	ASPE	التحيز النسبي
Meulenberg	152.486	-.0.480
تصغير التحيز	147.898	-0.0466
المقدر المعيب	147.282	-0.0469
MVU	152.486	-0.0480
المقدر الجديد	161.950	-0.0508

من الجدول (5) نحصل على ما ياتي:

1- بالرغم من وجود فروقات بين المقدرات وفقا لهذين المقدرين فان هذه الفروقات ضئيلة جداً.

2- من مقارنات أرقام الكاتب Duan فإنه تم التوصل إلى أن المقدر المعيب هو الأنسب للاستخدام في المقارنة بين النماذج . كذلك فإن مقدر تصغير التحيز هو الأنسب للاستخدام وفي المقابل فإن المقدر الجديد هو اكثر المقدرات ابتعادا عن أن يكون مناسبا للتقدير في هذه الحالة ، بينما مقدر تصغير التحيز كان هو الأبعد عن أن يكون مناسبا للاستخدام في مقارنة (Duan) .

3- كذلك فإن مقارنات Duan قد أظهرت تكافؤاً بين كل من مقدري (MVU) ومقدر (Meulenberg) ، هذه النتيجة قد تأكدت بصورة واضحة في عملية المقارنة التي تمت في هذا البحث.

4- من جداول (6) ,(7) ,(8) فإن بالإمكان ملاحظة انه كلما اقتربت σ^2 من الصفر كلما قلت الفروقات فيما بين هذه المقدرات وباعتبار $\left(\sigma^2 = 0.0025\right)$ كمقدر للتباين σ^2 ، فأن اقتراب هذه القيمة من الصفر يوضح التقارب الشديد بين هذه المقدرات.

إن هذا التحليل يعني انه في الحالة التي تبتعد فيها σ^2 من الصفر فان ذلك قد يؤدي الى التباين بين هذه المقدرات على وفق المعيارين السابقين ، وحيث أن أوضاع كل من المقدر المعيب وفق (Meulenberg) والمقدر (MVU) قد اثبت نوعا من الاستقرار ، فإن المتوقع أن يودي ابتعاد قيمة σ^2 عن الصفر إلى تغير مواقع كل من المقدر الجديد ومقدر تصغير التحيز وهذا يعني أن المقدر الجديد قد يأخذ العينة الأقل لكلا المعيارين عند قيم σ^2 بعيدة عن الصفر.

الجدول (6) : يوضح قيمة دالة (MSE) الخاصة بالمقدر الجديد

V	5				10				15			
σ^2												
λ^2	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00
0.05	0.007	0.022	0.069	0.323	0.006	0.019	0.065	0.228	0.006	0.018	0.051	0.126
1.10	0.011	0.036	0.099	0.381	0.011	0.033	0.091	0.321	0.011	0.033	0.087	0.299
0.15	0.017	0.050	0.130	0.451	0.017	0.049	0.125	0.413	0.017	0.048	0.124	0.402
0.20	0.022	0.064	0.163	0.527	0.022	0.063	0.160	0.511	0.022	0.063	0.158	0.506
0.25	0.028	0.078	0.196	0.614	0.028	0.078	0.195	0.609	0.028	0.078	0.195	0.606
0.30	0.033	0.092	0.231	0.707	0.033	0.092	0.229	0.707	0.033	0.092	0.229	0.704
0.35	0.038	0.108	0.265	0.802	0.038	0.108	0.265	0.801	0.038	0.108	0.265	0.802
0.40	0.043	0.122	0.300	0.902	0.043	0.122	0.300	0.900	0.043	0.122	0.300	0.900
0.45	0.049	0.137	0.336	1.003	0.049	0.137	0.335	0.995	0.049	0.137	0.333	0.992
0.50	0.054	0.153	0.373	1.106	0.054	0.152	0.369	0.087	0.054	0.152	0.368	1.082
0.55	0.060	0.168	0.404	1.207	0.060	0.167	0.402	0.180	0.060	0.166	0.401	1.172
0.60	0.065	0.182	0.445	1.305	0.065	0.181	0.437	1.269	0.064	0.180	0.434	1.259
0.65	0.071	0.198	0.481	1.405	0.070	0.195	0.470	1.356	0.070	0.195	0.467	1.340
0.70	0.076	0.213	0.518	1.500	0.075	0.211	0.508	1.441	0.075	0.209	0.498	1.419
0.75	0.082	0.229	0.552	1.598	0.081	0.225	0.536	1.525	0.081	0.223	0.529	1.498
0.80	0.087	0.244	0.589	1.693	0.086	0.239	0.564	1.604	0.085	0.236	0.561	1.571
0.85	0.093	0.259	0.625	1.789	0.092	0.245	0.600	1.683	0.091	0.250	0.590	1.645
0.90	0.098	0.275	0.659	1.884	0.096	0.261	0.631	1.759	0.096	0.265	0.622	1.713
1.95	0.104	0.290	0.696	1.479	0.102	0.281	0.663	1.835	0.102	0.279	0.651	1.780
1.00	0.109	0.306	0.730	2.074	0.107	0.245	0.34	1.908	0.106	0.291	0.679	1.846
1.5	0.165	0.457	1.073	3.118	0.159	0.431	0.979	2.577	0.168	0.422	0.945	2.406
2	0.220	0.605	1.418	4.637	0.211	0.560	1.235	3.243	0.208	0.543	1.171	2.865
2.5	0.275	0.750	1.705	2.320	0.261	0.679	1.471	4.083	0.256	0.654	1.365	3.319
3	0.329	0.894	2.241	12.523	0.331	0.792	1.701	5.331	0.208	0.755	1.540	3.868
3.5	0.383	1.039	2.801	23.523	0.358	0.899	1.941	7.391	0.348	0.850	1.701	4.610
4	0.438	1.192	3.537	45.379	0.404	1.002	2.206	11.006	0.392	0.936	1.860	5.741
4.5	0.491	1.352	4.536	93.245	0.450	1.100	2.511	17.604	0.434	1.018	2.023	7.562
5	0.543	1.525	5.917	198.119	0.494	1.198	2.882	30.013	0.475	1.095	2.199	10.609

الجدول (7) : يوضح قيمة دالة (MSE) الخاصة بالمقدر (MVU)

V	5				10				15			
σ^2 / λ^2	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00
0.05	0.007	0.023	0.081	0.405	0.006	0.019	0.061	0.272	0.006	0.018	0.054	0.226
1.10	0.012	0.040	0.120	0.536	0.011	0.036	0.102	0.410	0.011	0.035	0.096	0.367
0.15	0.018	0.055	0.160	0.674	0.017	0.053	0.145	0.555	0.017	0.051	0.138	0.516
0.20	0.023	0.071	0.230	0.818	0.023	0.068	0.188	0.709	0.022	0.068	0.183	0.674
0.25	0.029	0.087	0.246	0.973	0.029	0.085	0.232	0.873	0.029	0.085	0.228	0.837
0.30	0.034	0.104	0.290	1.134	0.034	0.103	0.279	1.041	0.034	0.101	0.275	1.011
0.35	0.040	0.121	0.336	1.305	0.040	0.119	0.326	1.221	0.040	0.118	0.322	1.193
0.40	0.045	0.139	0.383	1.484	0.045	0.136	O.374	1.411	0.045	0.136	0.371	1.386
0.45	0.051	0.155	0.432	1.674	0.051	0.154	0.424	1.609	0.051	0.154	0.420	1.587
0.50	0.057	0.173	0.481	1.876	0.056	0.172	0.475	1.814	0.056	0.172	0.473	1.802
0.55	0.063	0.191	0.533	2.090	0.063	0.190	0.528	2.041	0.063	0.190	0.526	2.025
0.60	0.069	0.209	0.585	2.313	0.069	0.208	0.582	2.275	0.069	0.208	0.580	2.262
0.65	0.074	0.227	0.640	2.552	0.074	0.227	0.636	2.520	0.074	0.227	0.635	2.509
0.70	0.081	0.247	0.696	2.805	0.081	0.247	0.694	2.781	0.081	0.245	0.692	2.773
0.75	0.086	0.266	0.753	2.072	0.086	0.265	0.752	3.055	0.086	0.265	0.752	3.047
0.80	0.092	0.285	0.813	3.354	0.092	0.285	0.813	3.340	0.092	0.285	0.811	3.341
0.85	0.098	0.304	0.874	3.656	0.098	0.304	0.874	3.648	0.098	0.304	0.874	3.645
0.90	0.104	0.324	0.938	3.974	0.104	0.324	0.938	3.971	0.104	0.324	0.936	3.969
1.95	0.111	0.344	1.002	4.311	0.111	0.344	1.002	4.311	0.111	0.344	1.002	4.311
1.00	0.116	0.365	1.070	4.670	0.116	0.365	1.070	4.670	0.116	0.365	1.070	4.670
1.5	0.179	0.587	1.863	9.772	0.179	0.586	1.853	9.617	0.179	0.586	1.848	9.566
2	0.246	0.846	2.946	19.449	0.245	0.840	2.890	18.395	0.245	0.837	2.870	18.047
2.5	0.317	1.149	4.437	38.466	0.316	1.131	4.270	34.297	0.315	1.126	4.214	32.959
3	0.392	1.502	6.506	77.080	0.390	1.469	6.118	36.765	0.389	1.457	5.990	59.571
3.5	0.473	1.918	9.409	157.938	0.467	1.857	8.514	119.447	0.466	1.836	8.346	111.791
4	0.558	2.406	13.503	330.255	0.551	2.302	11.968	226.517	0.648	2.273	11.477	183.593
4.5	0.650	2.983	19.343	811.641	0.639	2.825	16.571	436.469	0.635	2.773	15.661	
5	0.746	3.662	27.707	1547.945	0.718	3.427	22.81	854.111	0.727	3.349	21.267	

الجدول (8) : يوضح قيمة دالة (MSE) الخاصة بمقدار تصغير التحيز

V	5				10				15			
σ^2												
λ^2	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00	0.10	0.25	0.50	1.00
0.05	0.006	0.019	0.059	0.278	0.006	0.021	0.068	0.365	0.007	0.026	0.101	0.775
1.10	0.012	0.037	0.108	0.475	0.012	0.038	0.117	0.575	0.012	0.043	0.153	1.043
0.15	0.017	0.055	0.160	0.703	0.018	0.056	0.171	0.819	0.018	0.062	0.209	1.350
0.20	0.023	0.071	0.203	0.818	0.023	0.075	0.228	1.099	0.024	0.081	0.269	1.702
0.25	0.029	0.093	0.278	1.272	0.029	0.095	0.290	1.422	0.030	0.100	0.334	2.103
0.30	0.035	0.113	0.344	1.620	0.036	0.115	0.357	1.791	0.036	0.121	0.405	2.560
0.35	0.042	0.134	0.415	2.088	0.042	0.136	0.430	2.212	0.042	0.143	0.480	3.078
0.40	0.048	0.156	0.492	2.471	0.048	0.159	0.507	2.689	0.049	0.165	0.561	3.664
0.45	0.054	0.179	0.574	2.984	0.054	0.182	0.591	3.231	0.055	0.188	0.649	4.325
0.50	0.061	0.203	0.662	3.565	0.061	0.205	0.680	3.843	0.062	0.212	0.742	5.070
0.55	0.067	0.228	0.757	4.222	0.068	0.230	0.776	4.534	0.068	0.238	0.842	5.908
0.60	0.074	0.254	0.858	4.961	0.074	0.256	0.879	5.313	0.075	0.264	0.949	6.844
0.65	0.084	0.280	0.967	5.794	0.081	0.283	0.988	6.187	0.082	0.291	1.063	7.904
0.70	0.088	0.308	1.082	6.729	0.088	0.311	1.105	7.169	0.089	0.319	1.186	9.086
0.75	0.095	0.337	1.206	7.777	0.095	0.339	1.231	8.270	0.096	0.348	1.316	10.409
0.80	0.102	0.367	1.338	8.452	0.102	0.369	1.364	9.503	0.103	0.378	1.455	11.887
0.85	0.109	0.398	1.478	10.267	0.110	0.400	1.506	10.882	0.110	0.409	1.604	13.537
0.90	0.117	0.430	1.628	11.737	0.117	0.432	1.658	12.422	0.118	0.442	1.760	15.379
1.95	0.124	0.463	1.788	13.378	0.125	0.466	1.819	14.142	0.125	0.475	1.928	17.432
1.00	0.132	0.497	1.957	15.209	0.132	0.500	1.991	16.061	0.133	0.510	2.106	19.719
1.5	0.215	0.913	4.350	49.754	0.215	0.917	4.410	52.193	0.216	0.931	4.615	62.552
2	0.312	1.488	8.586	147.373	0.312	1.494	8.690	154.159	0.313	1.513	9.047	182.854
2.5	0.423	2.271	15.901	417.499	0.424	2.279	16.079	436.147	0.425	2.305	16.687	514.835
3	0.552	3.323	18.336	1157.904	0.552	3.334	28.638	1208.853	0.554	3.368	29.662	1423.630
3.5	0.699	4.723	49.264	3178.397	0.694	4.737	49.768	3317.226	0.701	4.782	51.482	3902.182
4	0.866	6.574	84.248	8680.763	0.867	6.593	85.089	9058.569	0.869	6.652	87.943	10650.098
4.5	1.057	9.007	142.473	23650.703	1.057	9.031	143.870	24678.236	1.060	9.109	148.608	29006.324
5	1.273	12.191	239.088		1.274	12.223	241.403	67163.675	1.276	12.324	249.250	78971.025

الخاتمـــة

لقد تم في هذا البحث عرض صورة ، نرجو أن تكون متكاملة ، عن أحـد مشـكلات التقدير في النماذج غير الخطية.

هذه الصورة قد لا نكاد نجدها في الكتب المنهجية، ونحن على أمل أن هذا البحـث سـيكون بداية لإعطاء هذه المشكلة ما تستحق من الاهتمام. هذه الصورة قد تمثلت في تمركزها حول محورين:

المحور الأول:

يمثل تلك المعالجات والطرائق التي تعالج حالة تحويل خاصة حيث يوجـد بالتحديـد نوعـان مـن التحـويلات الخطيـة بهـذا المحـور همـا التحويـل اللوغـاريتمي (The Logarithmic Transformation) وتحـويلات القـوى للكـاتبين (Box-Cox) ، والواقع أن التحويل اللوغاريتمي هو اكثر التحويلات التي حازت على اهتمام الكاتب في هذا الخصوص بل إن اكثر ما نشر بخصوص مشكلة البحث هذه كان حول هذا التحويل. وفـي هذا الصدد فقد تم إيجاد مقدر اكثر كفاءة من تلك المقدرات التي عالجت هذه المشـكلة فيمـا يتعلق بهذا التحويل وهو المقدر الذي أطلق علية (بالمقدر الجديد).

المحور الثاني:

يتمثل في تلك الطرائق الأكثر عمومية والتي حاولت أن تجد تقـديرات لأكثـر مـن تحويل، هذه الطرائق هي بالتحديد طريقة الفك وطريقة المقدر المعيـب، وطريقـة تصـغير التحيز. طريقة الفك هي الأقدم زمنياً ، وتتميز بكونها قد سعت إلى إيجاد تقديرات ذات كفاءة عالية ، وهي التقديرات (MVU) .

أما طريقتا المقدر المعيب وتصغير التحيز فقد ظهرتا بعد الأولى بأكثر من عشرين عامـاً . وربما يكون الرابط بين كل من طريقتي المقدر المعيب وتصغير التحيز ، هو أن كلا منهما قد ظهرت كبديل لطريقة الفك على أساس أن كل واحدة منهما تعالج نوعا من القصور في هذه الطريقة. فبالنسبة الى الكاتب (Duan) الذي قدم طريقة المقدر المعيب فان القصور الذي رآه في طريقة الفك، هو حساسية مقدرات هذه الطريقة للابتعاد عن التوزيع الطبيعي للأخطـاء، حيث استخدم معيار التحيز النسبي التقريبي المحدد كمعيار لهذه الحساسية.

ونتيجة لذلك العيب فأن الكاتب (Duan) قد رأى أن طريقة المقدر المعيب هي البديل الذي لا يتأثر بطبيعة التوزيع الحقيقي للأخطاء بوصفها طريقة لامعلمية.

أما بالنسبة الى الكاتب (Miller) الذي قدم طريقة تصغير التحيز، فان القصور الذي رآه في طريقة الفك، هو تلك التعقيدات والصعوبات التي قامت عليها هذه الطريقة ، وعليه فإن طريقة تصغير التحيز هي البديل الذي يقدم مقدرات اكثر سهولة.

ومن خلال عملية المقارنة التي تمت في الجزء الثالث بين كل من طريقتي المقدر المعيب وطريقة الفك فمن السهل الحصول على حقيقة ذات أهمية بالغة ، هذه الحقيقة هي انه إذا كانت مقدرات طريقة الفك تتأثر بالابتعاد عن التوزيع الطبيعي للأخطاء في حالة التحويل اللوغاريتمي ، فإن ذلك التأثير ليس بالضرورة صحيحاً لكل التحويلات . اكثر من ذلك فإن الكاتب (Duan) [2] قد اثبت كفاءة المقدر المعيب في حالة العينات الكبيرة ، أما في ما يتعلق بالعينات الصغيرة فإن تلك الكفاءة تظل محل شك. ولتأكيد ذلك ، فإنه بالإمكان ملاحظة أن الكاتب (Taylor) في إطار مقارنته لطريقة ثيتا الصغيرة مع طريقة المقدر المعيب ، قد اثبت نتيجة ذات وجهين:

الوجه الأول : هو أن مقدر ثيتا الصغيرة ، هو أصلا مقدر تقريبي للتوقع θ حيث يقدر الكمية Y_0 وليس θ.

الوجه الثاني : هو أن مقدر ثيتا الصغيرة يكافئ المقدر المعيب.

هذا التحليل يؤكد الشك السابق في كفاءة المقدر المعيب في حالة العينات الصغيرة . أما فيما يتعلق بطريقة تصغير التحيز ، فإن المقارنات التي تمت في الجزء الثالث توضح أن طريقة الفك اكثر كفاءة منها ، وحيث انه قد تم تبسيط وتوضيح طريقة الفك ، فإنه لم يعد هنالك مبرر للتخلي عن مقدراتها من اجل الحصول على مقدرات طريقة تصغير التحيز الأقل كفاءة. إن هذا لا يعني التخلي عن كل من طريقتي المقدر المعيب وتصغير التحيز بناء على تلك الاستنتاجات، حيث أن كلا من هاتين الطريقتين تقدمان بديلا سهلا في كثير من الحالات التي لا يوجد لها تقديرات في طريقة الفك.

أخيراً ، فإن الكاتب (Duan) [2] قد توصل في مقارنة مشابهة بالمقارنة التي تمت على البيانات العملية في الفصل الثالث إلى أن المقدر المعيب هو انسب المقدرات للاستخدام في الحالة الخاصة التي يتم فيها الاختيار بين مجموعة من النماذج. وربما يكون أهم استنتاج بهذا الخصوص ومن خلال المقارنة التي تمت مع البيانات الواقعية في الفصل الثالث ، هو أن ما توصل إليه الكاتب(Duan) في مقارنته ليس بالضرورة صحيحا حيث أثبتت المقارنة التي تمت في هذا البحث نتيجة مختلفة للنتيجة التي توصل إليها (Duan) .

المصـــــادر

1. Duan, N. (1983) " Smearing Estimate, A Non-parametric Retransformation Method", Journal of the American Statistical Association, 78,605-610.
2. Duan, N. Manning. W.G., Morris C.N and New house J.P. (1983) , "A comparison of alternative Models for the Demand for Medical care" Journal of Business and Economics Statistics, 1,115-126.
3. Finney, D.J. (1941) " On the distribution of Variant whose Logarithm is Normally Distributed" Supplement to Journal of the Roy al Statistical society, 7,155-161.
4. Meulenberg, M.T. G. (1965) "On the Estimation of an Exponential function", Econometric, 33,863-868.
5. Weisberg S. (1980) " Applied Linear Regression", John-Wiley and sons.

6- السنباني، عادل علي احمد" تقدير توقع متغير الاستجابة في النماذج غير الخطية القابلة التحويل إلى نماذج خطية (رسالة ماجستير/جامعة بغداد 1995).